GI/PH/c型待ち行列における待ち時間分布の裾について (待行列理論とその応用)

高橋, 幸雄

数理解析研究所講究録
425巻 1981年 1-14

GI／PH／c型待ち行列における待ち時間分布の裾について

東北大 経済学部　　高橋 幸雄

1．モデルと主な結果［3］

複数窓口（窓口の数 c ），再生型到着（到着時隔分布 $F(x)$ は一般分布），相型サービス（相型のサービス時間分布 $S_j(x)$ は窓口ごとに異る）の標準的な待ち行列モデル GI／PH／c において、つぎのことが示される。

1−1　平衡状態において、客が到着したときすでに系内に（その客は含まずに） m 人以上の客がいる確率を P_m，先着順サービス規律の下で x 時間以上待たされる確率を $1-W(x)$ とする。これらはつぎのような漸近的性質をもつ。

$$P_m = K\eta^m + o(\eta^m), \qquad m \longrightarrow \infty \tag{1.1}$$

$$1-W(x) = K\eta^c e^{-\xi x} + o(e^{-\xi x}), \quad x \longrightarrow \infty \tag{1.2}$$

1-2　定数 η と ξ はつぎのようにして定められる。$F(x)$, $S_j(x)$ の Laplace-Stieltjes 変換を $f(z)$, $\varphi_j(z)$ とし，それらの逆関数を $f^{-1}(u)$, $\varphi_j^{-1}(u)$ で表わす。すると η は $0<\eta<1$ であるようなつぎの方程式の根，ξ は $\xi=f^{-1}(\eta)$ である。

$$(1.3)\qquad f^{-1}(\eta) = -\sum_{j=1}^{c} \varphi_j^{-1}(1/\eta)$$

1-3　(1,1), (1,2) の中の定数 K は、複数個の窓口が空いているときに系に到着した客の窓口選択規則にも依存し、計算するのは一般に簡単ではない。K の値を求めるには、平衡状態における状態確率を計算するか、(1,1) を利用してシミュレーションから推定することしか知られていない。

1-4　各窓口におけるサービス時間分布が同じならば，(1,3) はつぎのように書き直すことができる。

$$(1,4)\qquad f(\xi)\cdot\varphi(-\xi/C) = 1$$

この式からつぎのことがわかる。この複数窓口モデルを、同じ到着間隔分布をもちサービス時間分布が $S(cx)$ である

ような窓口１つのモデル　GI／PH／1　と較べると、系内人数分布および待ち時間分布の裾の減少率は両者とも同じである。

1-5　系内人数が n であるという条件の下で、直前の到着からの経過時間と各窓口でサービス中の客のサービス経過時間は $n \to \infty$ のとき漸近的に独立となり、その条件付同時分布の密度関数は

$$K' \bar{F}(x) \bar{S}_1(y_1) \cdots \bar{S}_c(y_c) \exp\{-\xi x + \theta_1 y_1 + \cdots + \theta_c y_c\} \tag{1.5}$$

に収束する。ここで $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $\bar{S}_j(y) = 1 - S_j(y)$, $\theta_j = -\varphi_j^{-1}(1/\eta)$ である。

2.　相型分布〔2〕

状態数有限，時間パラメータ連続の吸収的マルコフ連鎖における吸収時間分布として表しうるような（0，∞）上の確率分布を相型分布と呼ぶ。

2-1　相型分布　$G(x)$　は、対応するマルコフ連鎖の初期

確率ベクトル $\underset{\sim}{\tilde{\alpha}}=(0,\ \underset{\sim}{\alpha})$ と無限小生成作用素 $\tilde{T}=\begin{pmatrix} 0 & \underline{0} \\ \underline{t} & T \end{pmatrix}$

で（一意的ではないが）表現することができる。分布関数 $G(x)$ と Laplace-Stieltjes 変換 $\gamma(z)$ はつぎのように表せる。

(2.1) $\qquad G(x)=1-\underset{\sim}{\alpha}\exp(Tx)\underline{e}, \quad \gamma(z)=\underset{\sim}{\alpha}(zI-T)^{-1}\underline{t}$

ただし $\underline{e}=(1,1,\cdots,1)^{T}$ である。

$G(x)$ の表現 $(\underset{\sim}{\alpha}, T)$ が既約とは、行列 $\underline{t}\underset{\sim}{\alpha}+T$ が既約のことである。〔注）$\underline{t}=-Q\underline{e}$, $\underset{\sim}{\alpha}\underline{e}=1$〕

2-2 　アーラン分布，超指数分布などは相型分布である。また相型分布のクラスは $(0,\infty)$ 上のすべての確率分布の集合の中で稠密である。

3. 行列幾何的な定常ベクトル〔2〕
（Matrix-geometric invariant vector）

次の形の推移確率行列をもった時間パラメータ離散のマルコフ連鎖を考える。状態空間は m 個の状態から成るグルー

プ $\underline{i}$, $i=1, 2, \cdots$, と m' 個の状態から成るグループ $\underline{0}$ に分割され、グループ間の推移が行列 A_j, $j=0,1,2,\cdots$ および B_{j0}, B_{j1}, $j=0,1,2,\cdots$, でつぎのように与えられているものとする。

(3,1)

$$P = \begin{array}{c} \\ \underline{0} \\ \underline{1} \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ \underline{4} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \cdots \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} B_{00} & B_{01} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_{10} & B_{11} & A_0 & 0 & 0 & \cdots \\ B_{20} & B_{21} & A_1 & A_0 & 0 & \cdots \\ B_{30} & B_{31} & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ B_{40} & B_{41} & A_3 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \}m' \\ \}m \\ \}m \\ \}m \\ \}m \\ \vdots \end{array}$$

その定常ベクトルを，状態空間の同じ分割に対応させて、つぎのように書く

(3.2) $$\underline{x} = [\,\underline{x}_0\ \ \underline{x}_1\ \ \underline{x}_2\ \ \underline{x}_3\ \ \underline{x}_4\ \cdots\,]$$

3-1 $\underline{x} = \underline{x}P$ であるから $\underline{x}_i$ はつぎの式をみたす。

(3.3) $$\underline{x}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_{i+k-1} A_k \qquad (i \geqq 2)$$

仮に $\underline{x}_i$ のところに $m\times m$ 行列 X の i 乗を置いてみ

ると、方程式

(3,4) $$X=\sum_{k=0}^{\infty} X^k A_k$$

が得られる。この方程式は少なくとも1つの非負解をもち、最小の非負解 R (rate matrix) に対して，以下の性質が成りたつ。

3-2 η を R の Perron-Frobenius 根，すなわち，R の固有値の中で絶対値が最大であるような非負固有値とする。

基本定理 マルコフ連鎖 P が非零再帰的 (positive recurrent) ならば、$\eta<1$ であり、$\underline{x}\underline{e}=1$ であるようような非負定常ベクトル $\underline{x}$ が存在して、

(3,5) $$\underline{x}_i=\underline{x}_{i-1}R \qquad (i\geq 2)$$

である。

R の第 (k,j) 要素 r_{kj} にはつぎのような意味付けができる。状態のグループ $\underline{i}$ の第 k 要素を (i,k) とすれば，r_{kj} はマルコフ連鎖 P で状態 (i,k) から出発して，$\underline{i}$ に戻る前に状態 $(i+1,j)$ を訪問する平均回数である。

3-3　(3, 4) の最小の非負解 R は，つぎの逐次代入法で計算することができる。

$$R(0) = A_0 \tag{3, 6}$$

$$R(n) = \sum_{k=0}^{\infty} [R(n-1)]^k A_k \qquad (n \geq 1)$$

$n \to \infty$ のとき $R(n) \to R$ である。

3-4　(3, 5) の関係式があるので，$\underline{x}$ を求めるには $\underline{x}_0$，$\underline{x}_1$，R を求めればよい。このうち R は (3, 6) で計算できる。$\underline{x}_0$，$\underline{x}_1$ はつぎの連立一次方程式から求められる。

$$\underline{x}_0 = \underline{x}_0 B_{00} + \underline{x}_1 \sum_{k=0}^{\infty} R^k B_{k+1\,0}$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 B_{01} + \underline{x}_1 \sum_{k=0}^{\infty} R^k B_{k+1\,1} \tag{3.7}$$

$$\underline{x}_0 \underline{e} + \underline{x}_1 (I-R)^{-1} \underline{e} = 1$$

4. 行列のクロネッカー積・和と PH／PH／C モデル [1,4]

4-1　$m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ と $m'\times n'$ 行列 $B=(b_{kl})$ のクロネッカー積は $(mm')\times(nn')$ 行列で

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \tag{4,1}$$

で与えられる。

4-2　A と B がそれぞれ m 次, n 次の正方行列のとき、A と B のクロネッカー和は mn 次の正方行列で

$$A\oplus B=A\otimes I_n+I_m\otimes B \tag{4,2}$$

で与えられる。ここで I_k は k 次の単位行列を表す。

4-3　A, B が正方行列で, それぞれ固有値 λ_A, λ_B および対応する固有ベクトル $\underline{x}_A$, $\underline{x}_B$ をもっているものとすると、固有値の積 $\lambda_A\lambda_B$ は $A\otimes B$ の, 和 $\lambda_A+\lambda_B$ は $A\oplus B$ の固有値で, 対応する固有ベクトルは共に $\underline{x}_A\otimes\underline{x}_B$ で与えられる。

4-4　クロネッカー積や和は相型分布を使ったモデルの推

移確率行列などを表現するのに便利である。たとえば標準的な PH／PH／c 型待ち行列モデルの無限小生成作用素は下のようになる。

到着間隔分布の表現を（$\underline{\alpha}$，T），サービス時間分布の表現を（$\underline{\beta}$，S）とし，$\underline{t}=-T\underline{e}$，$\underline{s}=-S\underline{e}$ とする。システムの状態を（n；j；$i_1, \cdots, i_c$）

n --- 系内人数

j --- 到着過程の相番号

i_k--- 第 k 窓口でのサービス過程の相番号

とし，状態のグループを n の値によって分ける。ただし、簡単のため，$n \leq c$ である状態はひとまとめにして $\underline{0}$ で表す。すると，システムの状態はつぎの無限小生成作用素に従って推移する。

(4, 3)
$$Q = \begin{array}{c} \\ \underline{0} \\ \underline{c} \\ \underline{c+1} \\ \underline{c+2} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{0} & \underline{c} & \underline{c+1} & \underline{c+2} & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & & & \\ B_3 & A_1 & A_0 & 0 & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \ddots \\ 0 & & A_2 & A_1 & \ddots \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \end{array}$$

(4, 3) の中の A_0，A_1，A_2 はクロネッカー和を使ってつぎのように表わされる。

$$\begin{array}{lll} & A_0 = & (\underline{t}\underline{\alpha}) \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \\ (4.4) & A_1 = & T \oplus S \oplus \cdots \oplus S \\ & A_2 = & 0 \oplus (\underline{s}\underline{\beta}) \oplus \cdots \oplus (\underline{s}\underline{\beta}) \end{array}$$

この表現の簡潔さが解析における見透しを良くするのに大いに役立っている。B_1, B_2, B_3 もクロネッカー和を使って表せるが多少複雑になる。

4-5　3節の結果は、時間パラメータが連続なマルコフ連鎖に対しても、ほぼそのまま成り立つ。PH/PH/c の場合, R は

$$(4.5) \qquad A_0 + RA_1 + R^2A_2 = 0$$

をみたす最小の非負行列である。R の固有値 ζ と対応する固有ベクトル $\underline{z}$ は

$$(4.6) \qquad \underline{z}(A_0 + \zeta A_1 + \zeta^2 A_2) = \underline{0}$$

をみたしていることを利用すると, R の Perron-Frobenius 根は (1, 3) で与えられる η であり、それに対応する固有ベクトルは

(4,7) $$\underline{g}=\underline{\alpha}(\xi I-T)^{-1}\otimes\underline{\beta}\left(-\frac{\xi}{c}I-S\right)^{-1}\otimes\cdots\otimes\underline{\beta}\left(-\frac{\xi}{c}-S\right)^{-1}$$

であることがわかる。

（3,5）から、（3,2）の右辺の小ベクトル $\underline{x}_i$ は $i\to\infty$ のとき

(4,8) $$\underline{x}_i=K''\eta^i\underline{g}+o(\eta^i)$$

であることがわかる。系内人数が i である定常確率は $\underline{x}_i\underline{e}$ であるから、任意時点における系内人数分布の裾が（1,1）と同様に幾何的であることが示される。（1,1）は客の到着時点での分布についての結果であるが、これも（4,8）から容易に導くことができる。

4-6　客の到着時点におけるサービス過程の状態は $\underline{x}'_i=\frac{1}{\lambda}\underline{x}_i\cdot(\underline{t}\otimes I\otimes\cdots\otimes I)$ で表される。したがって（4,8）から

(4,9) $$\underline{x}'_i=\underline{v}_i+o(\eta^i),\quad \underline{v}_i=K'''\eta^i\underline{g}'$$

と近似できる。ここで $\underline{g}'$ は（4,7）の右辺で第1項をとり去ったものである。系に到着した客の待ち時間の従うマルコフ連鎖の無限小生成作用素 Q' は対角ブロックに $A'_1=S\oplus\cdots$

$\oplus S$，対角の1段下のブロックに $A_2' = (\underline{s}\,\underline{\beta}) \oplus \cdots \oplus (\underline{s}\,\underline{\beta})$ をもつ行列である。$\underline{x}' = [\underline{x}_1', \underline{x}_2', \cdots]$，$\underline{v} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \cdots]$ とすると

$$\underline{v}Q' = -\xi\underline{v} \tag{4, 10}$$

であること，従って

$$\begin{aligned} 1 - W(x) &= \underline{x}' \exp\{Qx\}\underline{e} \\ &\sim \underline{v} \exp\{Qx\}\underline{e} = \underline{v}\underline{e} \exp\{-\xi x\} \end{aligned} \tag{4, 11}$$

であることが示される。これが（1.2）である。

4-7　1節で述べた GI／PH／c モデルでは、客の到着時点を捉えて隠れマルコフ連鎖を作り、今と同様の方法で（1.1），（1，2），（1，5）などを示すことができる。

5.　3節の結果を利用できるモデルのいろいろ〔2〕

5-1　PH／PH／c，GI／PH／c 待ち行列モデル

5-2　1箇所を除いて行列の制限値が有限なネットワーク型待ち行列モデル，ただしサービス分布は相型分布← 直

列型待ち行列を含む。

5-3　有限状態のマルコフ再生過程に従って環境が変る下での M／M／c 型待ち行列モデル

5-4　担者が故障し、修理をうけるモデル

5-5　1つの待ち行列がオーバー・フローしたときに第2の待ち行列に客が流れるモデル

5-6　待たずにサービスされる客と待ってからサービスされる客でサービス率が異る M／M／c 型モデル

5-7　優先権の異る2種類の客が到着するモデル ただし優先権の高い方の客に対しては損失系となっている。

5-8　優先権のある客の有限ソースがあるモデル

5-9　2種類の客が到着し，異った種類の客のペアしかサービスできないモデル

［参考文献］

［1］ Bellman, R. (1960) Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill.

［2］ Neuts, M. F. (1981) Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models — An Algorithmic Approach, The Johns

Hopkins University Press.

[3] Neuts, M. F. & Y. Takahashi (1980) Asymptotic behavior of the stationary distributions in the GI/PH/c queue with heterogeneous servers, Applied Mathematics Institute, University of Delaware.

[4] Takahashi, Y. (1981) Asymptotic exponentiality of the tail of the waiting time distribution in a PH/PH/c queue, Adv. Appl. Prob. (to appear).

[5] Takahashi, Y. & Y. Takami (1976) A numerical method for the steady-state probabilities of a GI/G/c queueing system in a general class, J. Oper. Res. Soc. Japan. 19, pp. 147-157.